Robert MÜLLER
BRG 3, Wien

Mathematik mit dem TI-92

Seit Herbst 1997 läuft nach einzelnen lokalen Initiativen (z.B. Fuchs in Salzburg, Wurnig in Graz, Aspetsberger und Schlöglhofer in Oberösterreich, Böhm, Klinger und Lechner in Niederösterreich, Pecharda in Wien usw.) ein von LSI Dr. Heugl initiierter und vom Unterrichtsministerium und der Firma Texas Instruments unterstützter österreichweiter Feldversuch zur Einbindung des TI-92 in den Mathematikunterricht. Als flankierende Maßnahme hat der Verlag hpt zeitgerecht zu Schulbeginn 1997 das Werk "Mathematik mit dem TI-92" herausgebracht. Über dessen Konzept wie auch Möglichkeiten des konkreten Gebrauchs will dieser Vortrag informieren.

Schon in der Wahl des Titels eines Werkes kann – ja soll – sich dessen Anspruch und Konzept zeigen. "Mathematik mit dem TI-92" ([L1], Abb. 1) will weder das von den gleichen Autoren verfaßte vierbändige "Lehrbuch der Mathematik" ([L2], Abb. 2) noch das Handbuch des TI-92 ersetzen.

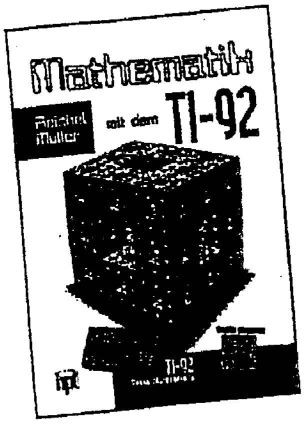

Abb. 1

Abb. 2

Abb. 3

Es kann auch nicht – im selben Maß – wie das gleichzeitig erschienene Werk "Wege zur Mathematik" ([L3], Abb. 3) anhand vieler motivierender Aufgaben und Themen die Freude an Mathematik wecken und vertiefen und so Lesern *Wege zur Mathematik* weisen.

Vielmehr handelt es sich – um es im EDV-Jargon modernistisch auszudrücken – um ein Add-on bzw. Plug-in. Anders als andere Werke ergänzt es nicht Jahr für

Jahr Band um Band, sondern es ergänzt(e) auf einen Streich den *gesamten* in Abb. 2 gezeigten vierbändigen Lehrgang um Kenntnisse und Fertigkeiten, die den Einsatz des TI-92 betreffen. Sachlogisch orientiert es sich daher nicht so sehr an den *Fähigkeiten* des Geräts (wie dies sonst beim Handbuch und bei einigen in Deutschland erschienen TI-92-Büchern der Fall ist), sondern an den *Anforderungen und Bedürfnissen* beim Lösen der im Lehrgang gestellten Aufgaben und Probleme und daher an dessen Struktur und Systematik – in letzter Konsequenz daher am Lehrplan für die Oberstufe der Allgemeinbildenden Höheren Schule.

Inhaltsverzeichnis

Indem das Werk so den *gesamten* Lehrstoff der Oberstufe abdeckt, unterscheidet es sich auch von jenen Werken, die anhand ausgewählter Problemstellungen (etwa die Einführung des Bestimmten Integrals, eingeschränkter Fragestellungen aus der Stochastik usw.) *nur punktuell* den Einsatz des TI-92 demonstrieren – wobei letztere Feststellung nicht abwertend gemeint ist. Letztlich geht es in diesem Vortrag aber eben auch darum, den Anspruch unseres Buches von denen anderer Bücher unterscheiden zu helfen.

Diesen Anspruch versuchen wir durch den Untertitel "Gewußt wie mit dem TI..." zu verdeutlichen. *Gewußt wie* weist auf unseren Anspruch für ein *verständiges* Umgehen mit dem TI-92 hin. *Gewußt wie* ist ein Bekenntnis zur bewußten und kritischen Antizipation einer Entwicklung, in der die Mathematik als (Hilfs-)Wissenschaft längst alle Bereiche unseres Lebens, ja die Art unseres Denkens durchdrungen hat. Es führt heute kein Weg daran vorbei, Erkenntnisse und Methoden, Begriffe und Notationen der Mathematik im Sinn von *Kulturtechnik* in seiner gerade aktuellen Ausprägung anzunehmen und zu leben.

Das Verwenden von Rechenhilfsmitteln (Taschenrechner, PC usw.) zählt heutzutage ebenso wie Fernsehen, Telephonieren oder auch das Ausfüllen von Schecks etc. und das Lenken von Fahrzeugen unübersehbar zu den Kulturtechniken unserer westlichen Zivilisation. Kennzeichnend für eine Kulturtechnik ist die fast vollständige Durchdringung unseres Lebens mit ihr, ebenso wie die Selbstverständlichkeit ihrer Anwendung (fast) von Kindesbeinen an.

Während jedoch Fernsehen wie Telephonieren Kulturtechniken darstellen, die schon dreijährige Kinder weitgehend beherrschen, stellt das Ausfüllen von Schecks etc. und das Lenken von Fahrzeugen, erst recht aber der Umgang mit Computern und Taschenrechnern weit höhere Ansprüche an das "Gewußt wie". Insofern macht es Sinn das "Gewußt wie" einer Kulturtechnik auf verschiedenen Levels zu erlernen und anzuwenden – auch und besonders dann, wenn nach REICHEL [L4] "die Allgemeinbildenden Höheren Schulen sicherlich nicht primär dazu da sind, Scheckausfüllen, Autofahren, Streitkultur und Medienumgang zu lehren".

Bezogen auf das Arbeiten mit dem TI-92 zielt das in Rede stehende Buch auf drei Levels des "Gewußt wie":

* *Gewußt wie* man mit dem Rechner "sofort" das Ergebnis erhält, und bei welchen Aufgaben dies der Fall ist.
* *Gewußt wie* der Rechner das jeweils (im Prinzip) "macht".
* *Gewußt wie* man den Rechner dazu bringen kann, Aufgaben, die er nicht von Haus aus "sofort" (auf Tastendruck) lösen kann, letztlich doch "sofort" (auf Tastendruck) lösen zu können.

In der Diktion der österreichischen Lehrpläne entspricht dies folgenden Ansprüchen bzw. Anspruchsniveaus:

* Grundkenntnisse und Grundfertigkeiten,
* Vertiefte Kenntnisse und Fertigkeiten, Begründen, Argumentieren und kritisches Denken
* Verallgemeinern, Abstrahieren, Algorithmisieren

All diesen Ansprüchen im Unterricht wie auch den verschiedenen Benutzergruppen in *einem* Unterrichtswerk zu genügen, ist nicht ganz einfach, wie das nebenstehende Epigramm (Abb. 4) oder die beiden folgenden Zitate von diametralen Rückmeldungen an den Verlag "beweisen".

> Der Lehrer hat die
> Aufgabe
> eine Wandergruppe
> mit Spitzensportlern
> und Behinderten
> bei Nebel
> durch unwegsames
> Gelände zu führen,
> und zwar so,
> dass alle bei bester Laune
> und möglichst gleichzeitig
> an drei verschiedenen
> Zielorten ankommen!

Abb. 4

Herr Prof. xxx schreibt: "Heute muß ich ein allergrößtes Kompliment an Sie, den Verlag und die Autoren betreffend das neue Buch 'Mathematik mit dem TI-92' aussprechen! Es ist erstens ausgezeichnet geschrieben. Zweitens knüpft es in großartiger Weise an das vorliegende Oberstufenwerk an. Drittens scheint es tatsächlich für die Lehrerfortbildung genauso gut geeignet wie für interessierte Schüler..."

Herr Prof. yyy hingegen kam zum Ergebnis "dass das Buch für Schüler eher unbrauchbar ist, weil keine mathematischen Beispiele, sondern nur Theorie beschrieben wird und die haben die Schüler sehr schnell heraus".

Aber machen Sie sich doch selbst ein Bild!. Ich habe dafür bewußt (aber ohne bewußte Beschränkung der Allgemeinheit) Abschnitte aus einem Standard-Kapitel gewählt: aus der Trigonometrie in der 6. Klasse. Gerade im "grauen" Unterrichtsalltag zeigt sich die Brauchbarkeit eines Unterrichtsbehelfs – und mehr als ein *Behelf* kann und will dieses für den Unterricht approbierte (und daher via Schulbuchliste bestellbare) Buch ja nicht sein! Seine konkrete Umsetzung ist Teil der kreativen Arbeit und der methodischen Freiheit des Lehrers, bei der wir ihn unterstützen, aber nicht bevormunden wollen[1].

[1] Dies schließt nicht aus, daß der TI-92 in naher Zukunft in das Buch integriert wird. Im Gegenteil: auf vielfachen Wunsch wird es in naher Zukunft parallel zum bestehenden ein dahingehend erweitertes (und auch in anderer Hinsicht "modernisiertes") Lehrwerk geben!

Warnung: [SIN⁻¹] ruft nicht den *Kehrwert* (im Sinn der Potenzrechnung) von SIN – also 1/SIN – auf, sondern die Umkehrung von SIN im Sinn der *Umkehrfunktion*. Dabei müssen wir die Taste [SIN⁻¹] drücken – Eintippen von SIN^{-1} wird nicht akzeptiert. Zwecks Vermeidung von Missverständnissen wird daher in der Mathematik (wie auch im Lehrbuch) auf die Schreibweise [SIN⁻¹] zu Gunsten der Schreibweise ARCSIN (für Arcus Sinus) verzichtet. Analoges gilt für COS und TAN.

Die Anwendung des eben Gesagten zur rechnerischen Auflösung eines rechtwinkeligen Dreiecks (Beispiel H, LB 6. Klasse S. 55) zeigt Fig. 6.2.8. Dabei beschriften wir die Seiten mit a, b und c, die Winkel mit α ([2nd] G A), β ([2nd] G B) und γ([2nd] G G). Da zwischen Groß- und Kleinbuchstaben nicht unterschieden werden kann, wird der Flächeninhalt A mit Area (wovon das A ja stammt), der Inkreisradius mit ir und der Umkreisradius mit ur benannt.

Bemerkung: Die durch Zuweisungen gespeicherten Ein- und Ausgabegrößen sollten vor neuen Rechnungen zur Vorsicht mittels DELVAR ([F4] 4) wieder gelöscht werden.

[1] Wir verwenden x statt – wie im Lehrbuch – φ, weil das kleine phi im Zeichensatz des TI-92 nicht enthalten ist.

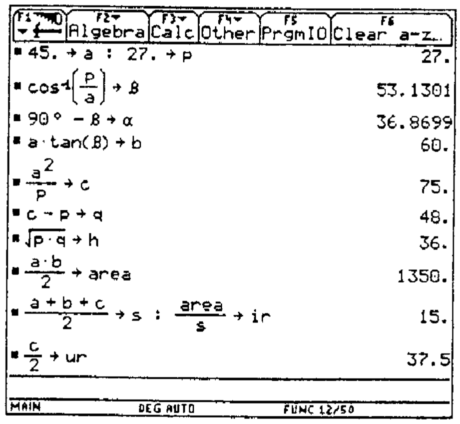

Fig. 6.2.8

Der voranstehende Ausschnitt aus S. 92 des Buches enthält ersichtlich die konkrete und *vollständige* Durchrechnung eines Musterbeispiels (dazu sind ja Musterbeispiele da), garniert mit einer Warnung, einer Bemerkung und einer Fußnote. Es ist dies das typische Strickmuster des Buches: unter Bezugnahme auf ein ganz konkretes Musterbeispiel oder eine ganz konkrete Übungsaufgabe aus dem zugrundeliegenden Lehrwerk werden nicht nur die vollständige Lösung angeboten, sondern auch Warnungen vor Fallstricken und typischen Fehlern, Hinweise auf andere (im Lehrwerk oft nicht angegebene) Lösungswege und (erst später thematisierte) theoretische Vertiefungen. Der folgende Ausschnitt aus Seite 93 zeigt in Fig. 6.2.10 ein Beispiel eines solchen Hinweises auf theoretische Vertiefung (Unendlichkeitsstellen der Tangensfunktion), in Fig. 6.2.11 ein Beispiel für die Aufklärung eines typischen Fehlers (Verkettung der Sinus- mit der Arcussinusfunktion).

Spezielle Werte und der Komplementärwinkelsatz lassen sich in Form von Listen leicht darstellen bzw. veranschaulichen (Fig. 6.2.10).

Bemerkung: Da ∞ keine Zahl ist, steht bei tan(90°) "undef" statt (wie im Lehrbuch) "∞". Beide Antworten sind richtig. Bei der Behandlung von Grenzwerten und Stetigkeit wird sich dieser scheinbare Widerspruch zwischen TI-92 und Lehrbuch klären.

Auch bei den Beziehungen zwischen Winkel- und Kreisfunktionen kommt es bei einer der beiden Beziehungen zu einem scheinbaren Widerspruch zwischen TI-92 und Lehrbuch (zweite Zeile in Fig. 6.2.11). Er klärt sich auf, wenn man in der behaupteten Identität arcsin(sin(x))=x das Bogenmaß verwendet und man sich – was wir bisher stets taten – auf spitze Winkel beschränkt (dritte Zeile in Fig. 6.2.11). Erkläre!

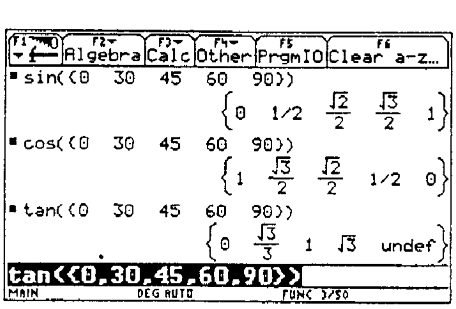

Fig. 6.2.10

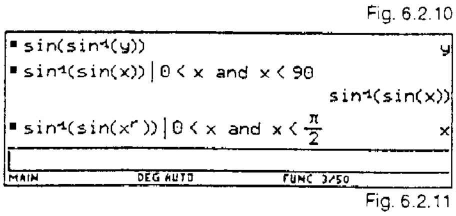

Fig. 6.2.11

Warnung: Bei der Berechnung des Polarwinkels θ sollte man stets im Approx-Modus arbeiten, indem man entweder den Befehl APPROX verwendet oder – einfacher – indem man bei ganzzahligen Eingaben (mindestens) einen Dezimalpunkt dazu setzt. Andernfalls erhält man ein zwar exaktes, aber doch ziemlich unverständliches Ergebnis (Fig. 6.2.13).

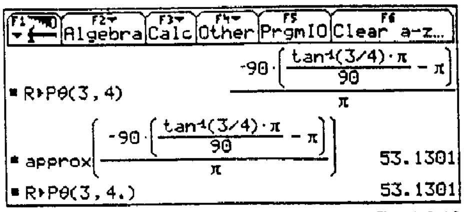

Fig. 6.2.13

Die **Reduktionsformeln** kann man – wie in der ersten Zeile von Fig. 6.2.14 beispielhaft angegeben – nachweisen. Darüber hinaus kann man diese Formeln auch vom TI-92 umformen lassen; dabei sieht man (zweite Zeile in Fig. 6.2.14), dass der TI-92 nicht automatisch auf das im Lehrbuch definierte Standardintervall [0°; 360°[reduziert.

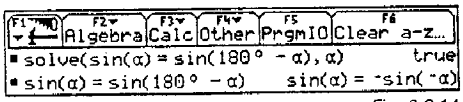

Fig. 6.2.14

Winkelfunktionen beliebiger Winkel – Funktionsgraphen

Zur Darstellung der kartesischen Funktionsgraphen von Winkelfunktionen (siehe LB 6. Klasse S. 69) *müssen* wir zunächst einmal mittels MODE Angle von DEGREE auf RADIAN umstellen!

Sodann definieren wir z.B. die Sinusfunktion im Y=-Fenster und starten den Zeichenvorgang mittels ZOOMDEC (F2 4). Offenbar ist die so gewonnene Kurve periodisch mit der primitiven Periodenlänge (LB 6. Klasse S. 68) p=2π, hat Nullstellen bei k*π, Tiefpunkte bei (-π/2+k*2π|-1) und Hochpunkte bei (π/2+k*2π|1) mit jeweils k∈ℤ. Dies kann man mittels der Befehle ZERO (F5 2), MINIMUM (F5 3) und MAXIMUM (F5 4) vom TI-92 rechnerisch nachprüfen lassen, indem man ihm jeweils die untere Grenze (lower bound) und die obere Grenze (upper bound) jenes Intervalls eingibt, in dem er suchen soll. Die Größe des Suchintervalls sowie die Darstellungsgröße der Kurve spielen dabei keine Rolle – die Werte werden ja rechnerisch ermittelt – nur die Eindeutigkeit des gesuchten Punktes im Suchintervall sowie die mittels MODE DisplayDigits voreingestellte Anzeigegenauigkeit (Fig. 6.2.15a bis 15c).

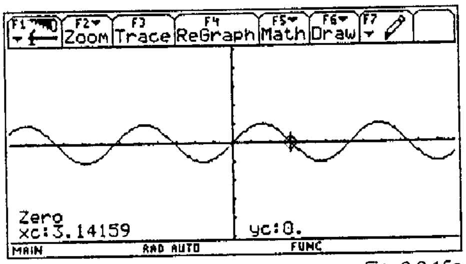

Fig. 6.2.15a

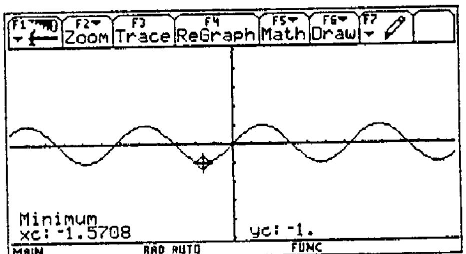

Fig. 6.2.15b

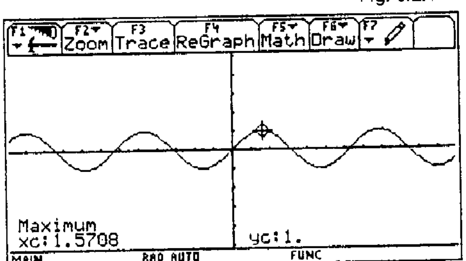

Fig. 6.2.15c

Zur Ermittlung des Funktionswertes y=f(x) bedienen wir uns des Befehls VALUE (F5 1). Nach Aufruf der Funktion erhalten wir die Möglichkeit, die gewünschte x-Koordinate einzutippen. Nach Betätigen der ENTER-Taste wird der Funktionswert yc angezeigt und der Cursor auf den Punkt (xc|yc) platziert – selbst wenn dieser außerhalb des Fensters liegen sollte.

Die obige Seite 94 mag – jedenfalls auf den ersten Blick – den Eindruck vermitteln, als ginge es hier nur um technische Details wie die Aufrufe der passenden Funktion(snam)en. Tatsächlich ist die Darstellung sehr technisch und gerafft – aber nur deswegen, weil hier vieles nur wiederholt bzw. in neuem Zusammenhang angewendet wird. Bei genauerem Hinsehen findet man auch hier sachdienliche Hinweise zum "Standardintervall" des TI-92, zum Einfluß der Fenstergröße beim Arbeiten mit MAXIMUM, MINIMUM usw., wobei die Verwendung dieser Funktionen durchaus als (versteckter) methodischer Hinweis aufgefaßt werden darf.

Überraschungen gibt es auch beim Lösen der Gleichung tan(x)=cot(x) (Beispiel P, LB 6. Klasse S. 70), die sich laut der ersten beiden Zeilen in Fig. 6.2.18 weder mit SOLVE noch mit NSOLVE lösen lässt. Warum?

Des Rätsels Lösung: Der TI-92 kennt die Funktion Cotangens nicht. Wir ersetzen daher cot(x) durch 1/tan(x) und erhalten mit SOLVE eine Parameterdarstellung der Lösungen, mit NSOLVE eine partikuläre Lösung – allerdings weitab vom erwarteten Wert. Durch Einschränkung des Suchbereiches mittels des WITH-Operators auf das Intervall]0,5; 1[liefert NSOLVE die erwartete Lösung, die wir noch vom Bogenmaß ins Altgradmaß umrechnen.

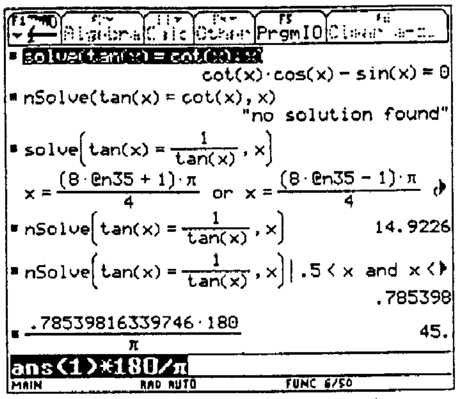

Fig. 6.2.18

Auflösung des schiefwinkeligen Dreiecks

Rechnerisch bietet dieses Kapitel, was den Gebrauch der Winkelfunktionen betrifft, nichts Neues. Man setzt bloß in Sätze wie den Cosinussatz, den Sinussatz usw. ein. Wir wollen uns daher hier an einem Beispiel den konstruktiven Lösungsmethoden widmen. Dazu benützen wir – wie in Kap. 5-12 bereits ausführlich beschrieben – das Geometrie-Fenster, allerdings ohne Koordinaten.

Fig. 6.2.19 zeigt die Veranschaulichung bzw. die Herleitung des Sinussatzes mit Hilfe des Ziehmodus. Nach Definition eines neuen Geometrie-Fenster s mittels APPS 8 3 mit Namen Sinus zeichnen wir mittels CIRCLE (F3 1) eine fast fensterfüllende Kreislinie. Auf dieser wählen wir mittels POINT ON OBJECT (F2 2) drei Punkte, die wir mittels LABEL (F7 4) mit A, B und C beschriften. Sodann zeichnen wir mittels SEGMENT (F2 5) die Strecken AB, AC und BC und messen mittels DISTANCE&LENGTH (F6 1) deren Längen. Anschließend messen wir mittels ANGLE (F6 3) die Winkel bei den Punkten A, B und C und bilden mittels CALCULATE (F6 6) die Quotienten aus den Seiten und dem Sinus des jeweils gegenüberliegenden Winkels. (Mathematisch gesehen handelt es sich um die Ausdrücke a/sin(α), b/sin(β) und c/sin(γ), die aber vom Befehl CALCULATE wie aus Fig. 6.2.19a ersichtlich immer in der Form R=a/sin(b) gebildet werden.) Die drei Quotienten stimmen gemäß Fig. 6.2.19b überein und ändern sich auch nicht, wenn man den Punkt C mittels der ✋-Taste längs der Kreislinie zieht.

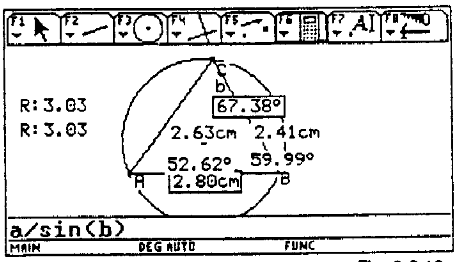

Fig. 6.2.19a

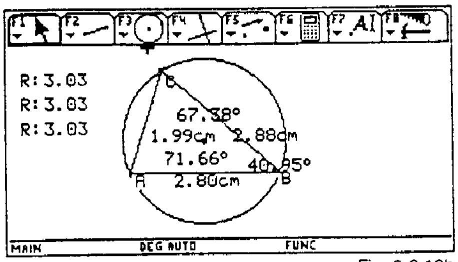

Fig. 6.2.19b

Zieht man insbesondere C so lange, bis die Seite a durch den Kreismittelpunkt geht, so wird das Dreieck ABC rechtwinkelig, wobei die Hypotenuse die Länge a=3.03=doppelter Umkreisradius annimmt. Damit haben wir den Sinussatz (Aufg. 332, LB 6. Klasse S. 76) hergeleitet.

Auf der voranstehenden S. 96 des Buches sind das Musterbeispiel P sowie die Aufgabe 332 des Lehrbuches für die 6. Klasse vollständig gelöst – wobei es sich ersichtlich nicht allein um eine "technische" Erklärung des (schon in der 5. Klasse behandelten) Handlings des Ziehmodus handelt, sondern gleichermaßen um einen *methodischen Vorschlag* für eine visuell-suggestive Beweisführung!

Für solche Tätigkeiten – Beweise führen, Begriffe bilden, Algorithmisieren und Programmieren – sollte im Unterricht mehr Zeit sein . Dies kann natürlich nur funktionieren, wenn man von "banalen" Rechenarbeiten entlastet wird. Brachte die Einführung des klassischen Taschenrechners hier schon vor Jahren eine deutliche Entlastung, so gilt dies noch viel mehr durch den Einsatz von Programmen am PC oder programmierbaren Taschenrechnern wie insbesonders eben den TI-92. Für alle diejenigen, welche (noch) nicht selbst solche Programme schreiben können oder wollen, sind auf der dem Buch beiliegenden Diskette unter anderem einige Programme zum Auflösen schiefwinkeliger Dreiecke enthalten.

Am besten startet man diese wie alle anderen Programme auch vom zentralen Menü "AllKlMen" (Alle-Klassen-Menü), welches man aus der Eingabezeile des HOME-Fensters im Hintergrund startet (Abb. 5). Mit CUSTOM schaltet man dieses benutzerspezifische Menü in den Vordergrund. Dort drückt man F2, um das 6.Klasse-Menü zu öffnen, fährt mit dem Cursor z.B. bis zum Menüpunkt SSS-Satz (Abb. 6) und wählt diesen mittels ENTER aus. Daraufhin wird der Programmaufruf automatisch in die Eingabezeile des HOME-Fensters übertragen, von wo man das Programm durch ENTER startet. Es erscheint das Input/Output-Fenster, wo vom Benutzer die Eingabe der drei Seiten in Form einer Liste erwartet wird (Abb. 7). Das Ergebnis ist in Abb. 8 zu sehen.

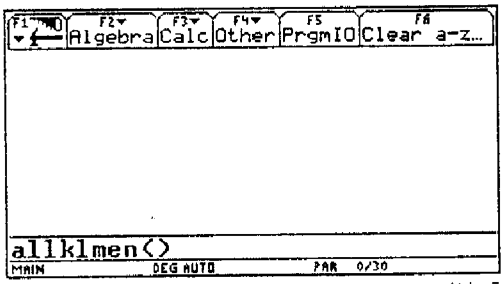

Abb. 5

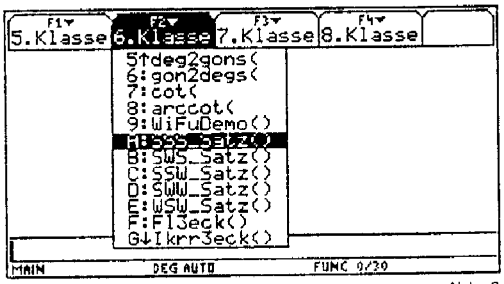

Abb. 6

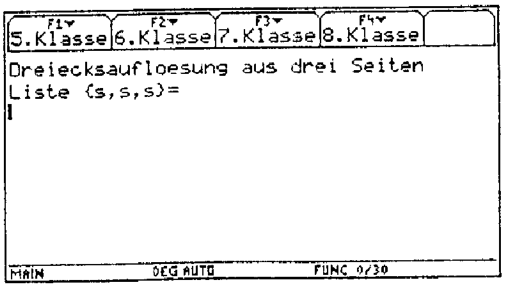

Abb. 7

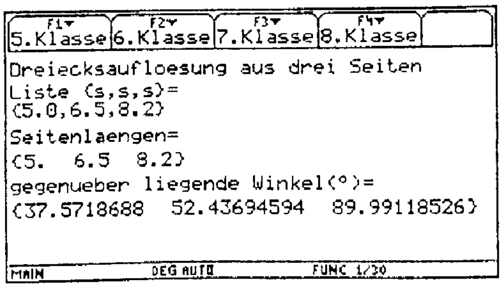

Abb. 8

Abb. 9 zeigt das Listing des Programms:

```
sss_satz()
Prgm
Local li,sli,wli,w
setMode("Angle","DEGREE")
ClrIO
Disp "Dreiecksaufloesung aus drei Seiten"
Input "Liste {s,s,s}=",li
augment(li,li)→sli

For i,1,3
 If sli[i+1]^2+sli[i+2]^2-sli[i+3]^2<0 Then□
 Disp "Ausgeartetes Dreieck"
 Stop
 EndIf
EndFor

{}→wli
For i,1,3
 cos⁻¹((sli[i+1]^2+sli[i+2]^2-sli[i+3]^2)/(2.*sli[i+1]*sli[i+2]))→w
augment(wli,{w})→wli
EndFor
li→é1
Disp "Seitenlaengen=",é1
wli→é2
Disp "gegenueber liegende Winkel(°)="
Disp é2
EndPrgm
```

Abb. 9

Man sieht, daß schon geringe Vorkenntnisse in einer prozeduralen Sprache ausreichen, um das Programm zu verstehen. Abgesehen vom Augment-Befehl zum Hinzufügen von Elementen zu einer Liste sind es im Prinzip altbekannte BASIC-Befehle zur Eingabe (Input), zum Anzeigen (Disp=Print), zum Generieren einer Schleife (For ... EndFor) oder einer Verzweigung (If ... EndIf). Mit diesen Befehlen findet man ersichtlich das Auslangen, um die Ein- und Ausgabe zu regeln und auf Plausibilität zu untersuchen und anschließend die gesuchten Winkel durch dreimalige Anwendung des Cosinussatzes zu berechnen.

Damit will ich den kurzen Einblick in das Buch "Mathematik mit dem TI-92" beschließen. Natürlich kann das Buch nicht alle der über 10000 Musterbeispiele und Übungsaufgaben des Oberstufenlehrgangs behandeln. Natürlich können die über 100 Programme, Funktionen und Makros auf der Diskette nicht alle Bereiche restlos abdecken. Natürlich können nicht alle möglichen Fehler in Warnungen vorweggenommen, alle denkbaren didaktischen "Gustostücke" in Hinweisen dargeboten oder sogar minutiös ausgearbeitet werden. Um wieder auf die obigen Rückmeldungen zurückzukommen: Offenbar wurden viele Wünsche erfüllt, andere blieben offen ... Aber eröffnet nicht gerade *beides* – Überfluß und Mangel – unserem Beruf die Chance didaktischer Initiative, die Freude an einem kreativen Unterrichten?

Was von den Warnungen beherzigt, was von den methodischen Hinweisen beachtet, oder sogar verwirklicht, was von den Programmen verwendet und was von den vielen vollständig gelösten Aufgaben und Musterbeispielen tatsächlich in den Unterricht einfließt, das liegt letztlich – Gottseidank noch immer – in der Verantwortung des Lehrers Das vorliegende Buch mag ihm aber dabei helfen, die fachlichen und didaktischen Möglichkeiten wie Probleme bei Verwendung des TI-92 im Mathematik-Unterricht bereits jetzt für den gesamten Oberstufenlehrplan abschätzen zu können und so seiner Verantwortung für einen gedeihlichen Unterricht gerecht zu werden.

Literatur:

[L1] REICHEL, H.-Chr., MÜLLER, R.: Mathematik mit dem TI-92
Verlag hpt, Wien 1997

[L2] REICHEL, H.-Chr., MÜLLER, R., HANISCH, G.: Lehrbuch der Mathematik, Bd. 1-4
Verlag hpt, Wien, 1989-1992

[L3] REICHEL, WINDISCHBACHER, RESEL, LATSCHAM, GÖTZ:
Wege zur Mathematik
Verlag hpt, Wien, 1997

[L4] REICHEL, H.-Chr.: Neuansätze und eine andere Sichtweise des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.
Vortragsmanuskript, Wien, 1998

[L5] MÜLLER, R.: Beispiele und Gedanken zum Einsatz des TI-92
Didaktikhefte der ÖMG, Heft 27, Wien, 1997